

数 学

(数 I ・ 数 II ・ 数 A ・ 数 B)

(注意事項)

1. 解答開始の指示があるまで問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子と解答用紙は別になっています。
3. 解答用紙の各ページの所定欄に受験番号、氏名を記入しなさい。
4. 計算等が必要な場合は問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 試験終了後は問題冊子を持ち帰りなさい。

数学

第 1 問

次の命題の真偽をそれぞれ調べよ。偽の場合には反例を示し，真の場合には証明せよ。

- (1) 0 ではない 2 つの実数 a, b について， $a^2 = b^2$ ならば $a = b$ である。
- (2) 実数 x, y について， $x + y \leq 4$ ならば， $x \leq 2$ または $y \leq 2$ である。
- (3) 自然数 n が 4 の倍数かつ 6 の倍数ならば， n は 24 の倍数である。
- (4) 自然数について，すべての偶数は素数ではない。
- (5) k は実数のイ澄？ 嶮矛盾乘 翠や南跨圖乘 犧冬 舜涌

第2問

以下は関数 $f(x), g(x)$ の性質について記述したものである。それぞれについて、実数の定数 a, b, c, d, e, h の値を具体的に求め、関数 $f(x), g(x)$ を式で示せ。

(1) $f(x)$ は次の性質や条件を持つ。

(i) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ である。

(ii) $x = -2$ は方程式 $f(x) = 0$ の解である。

(iii) $f(3) = -25$ である。

(iv) $f(x)$ は $x = 3$ で極小値をとる。

(2) ~~fgdfddfg~~ 20.076- Td (0 Td (.52g.47T037)7004407)Tj0337j T394027 0 Td (B1

数学

第3問

以下の問に答えよ。

- (1) 2023 を素因数分解せよ。
- (2) n を自然数とする。2023 n がある自然数の3乗になるような n のうち、最小のものを求めよ。
- (3) 方程式

$$49x + 91y = 2023$$

を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

- (4) 方程式

$$xy + 116x + 16y - 167 = 0$$

を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

第4問

以下の問に答えよ。

- (1) 任意の実数 a, b および正の実数 c に対して、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$ab \leq \frac{c}{2}a^2 + \frac{1}{2c}b^2$$

- (2) $0 < p < 1$ の定数 p に対して、

$$\sum_{k=1}^n kp^{k-1} = \frac{1-p^n}{(1-p)^2} - \frac{np^n}{1-p}$$

が成り立つことを示せ。ただし、等比数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^n p^{k-1} = \frac{1-p^n}{1-p}$$

は用いてよい。

- (3) q を正の実数とする。0 以上の実数 A, B が、

$$A \leq 2^{\frac{q}{2}}\sqrt{AB} + 2^q B$$

を満たすとき、

$$A \leq 3 \cdot 2^q B$$

が成り立つことを示せ。

(次ページに続く)

数学

(4) p を $0 < p < 1$ の定数とし, 数列 $\{b_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$b_n = np^{n-1}$$

と定義する。各項が 0 以上の数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が, 任意の自然数 n に対して,

$$a_{n+1} \leq 2^{\frac{b_n}{2}} \sqrt{a_{n+1}a_n} + 2^{b_n} a_n$$

を満たすとき, 任意の自然数 n に対して,

$$a_{n+1} \leq 3^n \cdot 2^{S_n} a_1$$

が成り立つことを示せ。ここで,

$$S_n = \frac{1 - p^n}{(1 - p)^2} - \frac{np^n}{1 - p}$$

である。