受験番号								氏名	

令和５年度前期日程試験解答用紙（数学）

【 解 答 例 】

〔注意事項〕

・監督者の指示があるまで解答用紙を開いてはいけません。

・全てのページの所定欄に受験番号、氏名を記入しなさい。

受験番号							氏名	

令和５年度前期日程試験解答用紙（数学）

第１問

(1) **偽。**$a = -b$ **もあり得る。**

(2) **真。**

対偶命題は「$x > 2$ **かつ** $y > 2$ **ならば，**$x + y > 4$**」であり，これは真である。したがって，元の命題は真である。**

(3) **偽。**$n = 12$ **は** 4 **の倍数かつ** 6 **の倍数だが** 24 **の倍数ではない。**

(4) **偽。**2 **は素数である。**

(5) **真。**

$f(x)$ **に極大値と極小値が存在するので，**$f'(x) = 3x\ \ + 4x + k = 0$ **は** 2 **つの実数解** $x = \alpha$**，**$\beta\ \ (\alpha < \beta)$ **を持つ。このとき、極大値は** $f(\alpha)$**，極小値は** $f(\beta)$ **であり，それらの和が** 0 **ならば，**

$$f(\alpha) + f(\beta) = \alpha\ \ + 2\alpha\ \ + k\alpha + \beta\ \ + 2\beta\ \ + k\beta = 0$$

が成り立つ。一方，α **と** β **は** 2 **次方程式** $3x\ \ + 4x + k = 0$ **の解なので**

$$\alpha + \beta = -\frac{4}{3}, \qquad \alpha\beta = \frac{k}{3}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \alpha\ \ + 2\alpha\ \ + k\alpha + \beta\ \ + 2\beta\ \ + k\beta \\ &= (\alpha + \beta)^{\square}(\alpha + \beta)\ \ - 3\alpha\beta^{\square} + 2^{\square}(\alpha + \beta)\ \ - 2\alpha\beta^{\square} \\ &\quad + k(\alpha + \beta) \\ &= \frac{32}{27} - \frac{4}{3}k = 0 \end{aligned}$$

が成り立ち，$k = \dfrac{8}{9}$ **である。**

第１問 得　点	

受験番号							氏名	

令和５年度前期日程試験解答用紙（数学）

第２問

(1) (i) **より** $f'(x) = 3x\ \ + 2ax + b$ **である。**

(ii) **より，** $f(-2) = -8 + 4a - 2b + c = 0$ **・・・(ア)**

(iii) **より，** $f(3) = 27 + 9a + 3b + c = -25$ **・・・(イ)**

(iv) **より** $x = 3$ **で極値を取るので導関数の値** $f'(3) = 0$ **である。よって** $27 + 6a + b = 0$ **・・・(ウ)**

(ア)(イ)(ウ) を連立一次方程式として解くと $a = -3,\ b = -9,\ c = 2$ **となる。この値を代入して，** $f(x) = x\ \ - 3x\ \ - 9x + 2$ **を得る。**

ここで $f'(x) = 3x\ \ - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$ **となり，** $f(3) = -25$ **は極小値と確認できる。**

答え: $f(x) = x\ \ - 3x\ \ - 9x + 2$

(2) x **のある区間で** $g(x)$ **の導関数** $g'(x)$ **の値が正であるとき，その区間で** x **が増えるにつれて** $g(x)$ **が増加する。また、** $g'(x)$ **が負であるときはその区間で** x **が増えるにつれて** $g(x)$ **が減少する。**

$\sin\theta$ **は** $0 < \theta < \pi/2$ **で増加する。ここで** $d > 0, e > 0$ **より,** $d \sin\ \ ex\ \ + h$ **は** $0 < x < \frac{\pi}{e}$ **で増加するので** (ii) **に反する。** $d \cos\ \ ex\ \ + h$ **は** $0 < x < \pi/e$ **で減少し，** $\pi/e < x < 2\pi/e$ **で増加するので，** $e = \pi/10$ **の時のみ** (ii) **と** (iii) **を満たす。**

実数 x **と** $e > 0$ **について** $\cos ex$ **の最大値は** 1**，最小値は** -1 **なので，** $d > 0$ **のとき** $d \cos\ \ ex\ \ + h$ **の最大値は** $d + h$ **，最小値は** $-d + h$ **である。**(iv) **より連立方程式** $d + h = 5$**，** $-d + h = 1$ **を解いて，** $d = 2$**，** $h = 3$ **。**

答え: $g(x) = 2\cos(\frac{\pi}{10}x) + 3$

第２問 得　点	

受験番号							氏名	

令和５年度前期日程試験解答用紙（数学）

第３問

(1)　2023 **を素因数分解すると，** $2023 = 7 \times 17$ 　**である。**

(2)　2023 **に** $7 \quad \times 17$ **を掛けると，** (7×17) 　**となるので，求める自然数は** $7 \quad \times 17 = 833$ **である。**

(3)　**まず，整数解を求める。与えられた方程式の両辺を** 7 **で割って**

$$7x + 13y = 289 \qquad \text{(A)}$$

更に変形して， $7(x-41) + 13y = 2$ **となる。** $7 \times 4 + 13 \times (-2) = 2$ **であるので，** (A) **を満たす整数解の** 1 **つは，** $x = 45$，$y = -2$ **である。これを** (A) **に代入すると，**

$$7 \times 45 + 13 \times (-2) = 289 \qquad \text{(B)}$$

(A)$-$(B) **から，** $7(x-45) + 13(y+2) = 0$ **を得る。変形して**

$$7(45-x) = 13(y+2) \qquad \text{(C)}$$

7 **と** 13 **は互いに素であるから，** $45 - x$ **は** 13 **の倍数。よって，** m **を整数として，** $45 - x = 13m$，**すなわち，** $x = 45 - 13m$ **と書ける。このとき，** (C) **から，** $7m = y + 2$，**すなわち，** $y = 7m - 2$ **となる。**

次に，自然数解を求める。 x，y **は自然数だから，** $x = 45 - 13m > 0$，**すなわち，** m **は** 3 **以下。また，** $y = 7m - 2 > 0$，**すなわち，** m **は** 1 **以上。したがって，求める自然数の組は** $(x,\ y) = (32,\ 5),\ (19,\ 12),\ (6,\ 19)$ **である。**

(4)　**与えられた方程式を変形して**

$$(x+16)(y+116) - 16 \times 116 - 167 = 0$$
$$(x+16)(y+116) = 2023$$

x，y **は自然数だから，左辺の** $x+16$，$y+116$ **はともに整数で，それぞれ** 16，116 **よりも大きい。**
一方，右辺の 2023 **の約数は，** 1，7，17，119，289，2023 **の** 6 **つ。よって，**

$$x + 16 = 17$$
$$y + 116 = 119$$

したがって，求める自然数の組は $(x,\ y) = (1,\ 3)$ **である。**

第３問 得　点	

受験番号								氏名	

令和５年度前期日程試験解答用紙（数学）

第４問

(1) $\frac{c}{2}a \quad + \frac{1}{2c}b \quad - ab = \quad \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}a - \frac{1}{\sqrt{2c}}b \qquad \geqq 0$

(2) $S_n = \overset{n}{\underset{k\quad 1}{}}\ kp^{(k-1)}$ **とおくと，**

$$S_n = 1 + 2p + 3p \quad + 4p \quad + \cdots + np^{(n-1)}$$
$$pS_n = \qquad p + 2p \quad + 3p \quad + \cdots + (n-1)p^{(n-1)} + np^n$$

この両辺同士をそれぞれ引くと，

$$(1-p)S_n = 1 + p + p \quad + \cdots + p^{n-1} - np^n = \frac{1-p^n}{1-p} - np^n$$

よって，

$$S_n = \frac{1-p^n}{(1-p)} - \frac{np^n}{1-p}$$

(3) $k = 2^{\frac{q}{2}}$ **とおくと，**(1) **より，任意の** $c > 0$ **に対して，**

$$k\sqrt{AB} \leqq \frac{kc}{2}A + \frac{k}{2c}B$$

が成り立つ。よって， $c = 1/k$ **ととると，**

$$A \leqq k\sqrt{AB} + k \quad B \leqq \frac{1}{2}A + \frac{3k}{2}B$$

したがって，

$$A \leqq 3k \quad B = 3 \cdot 2^q B$$

(4) $q = b_n,\ A = a_{n+1},\ B = a_n$ **とおくと，**(3) **より，任意の自然数** n **に対して，**

$$a_{n+1} \leqq 3 \cdot 2^{b_n} a_n$$

が成り立つ。これを繰り返し用いることで，(2) **より，**

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leqq 3 \cdot 2^{b_n} a_n \leqq 3 \cdot 2^{b_n} \times 3 \cdot 2^{b_{n-1}} a_{n-1} \\ &\leqq \cdots \\ &\leqq \underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{n\text{ 個}} \cdot 2^{b_n} \cdot 2^{b_{n-1}} \cdots 2^{b_2} \cdot 2^{b_1} a_1 \\ &= 3^n \cdot 2^{b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1} a_1 \\ &= 3^n \cdot 2^{\sum_{k=1}^{n} b_k} a_1 \\ &= 3^n \cdot 2^{S_n} a_1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

第４問 得　点	